数理解析研究所講究録
第8[illegible]巻 1993年 186-196

形式グラフ体系上の反駁木問題の並列化とグラフ同型問題

内田 智之 † (Tomoyuki Uchida)　正代 隆義 ‡ (Takayoshi Shoudai)　宮野 悟 * (Satoru Miyano)

†: 九州大学大学院総合理工学研究科情報システム学専攻
‡: 山口大学工学部
*: 九州大学理学部附属基礎情報学研究施設

要旨

形式グラフ体系 (Formal Graph System, FGS) は，文字列を論理プログラムの項として扱う基本形式体系 (Elementary Formal System) を，グラフを項として扱えるように拡張したグラフ生成システムである．論理プログラムと同様に FGS 上で反駁木を定義し，与えられたグラフの反駁木を構築する反駁木問題について考察する．FGS の部分クラスであるサイズ限定単純 FGS に対する反駁木問題がグラフ同型問題に NC^2 還元可能であることを示す．さらに，アトムに現れる変数の出現回数が高々 1 回であるようなサイズ限定単純 FGS 上の反駁木問題は NC^2 に属すことを示す．また，サイズ限定 FGS Γ を与え，Γ 上の反駁木問題は，本質的にグラフ同型問題を含むことを示す．

1 はじめに

形式グラフ体系 (Formal Graph System, FGS) は，論理プログラムの項として文字列を扱う基本形式体系 (Elementary Formal System)[2, 9] を，グラフを項として扱えるように拡張した新しい形式体系である [10]．また， FGS は，グラフがどのように生成されるかを明瞭かつ簡潔に表現できる論理プログラムである． FGS の部分クラスである正則 FGS が，文脈自由グラフ文法 [6] と同等の生成能力をもつことが内田ら [10] により示されている．本稿では，論理プログラムと同様に， FGS 上で反駁木を定義し，与えられたグラフの反駁木を構築する反駁木問題について考察する．反駁木は，与えられたグラフがどのようにして生成されたかを示す木であり，与えられたグラフに divide-and-conquer 技法をどのように適用すればよいかの指針を与える木である．したがって，反駁木問題を解くことは，多くのグラフ上の問題に対する効率よい並列アルゴ

Mailing address: Research Institute of Fundamental Information Science, Kyushu University 33, Fukuoka 812, Japan (e-mail: uchida@rifis.sci.kyushu-u.ac.jp, shoudai@rifis.sci.kyushu-u.ac.jp, miyano@rifis.sci.kyushu-u.ac.jp).

リズムの設計に非常に有用であると考えられる．例えば，インスタンスを反駁木が NC で求められるようなグラフに制限することにより，多くの NP 完全な問題が NC に入ることを示すことができる [4, 8]．内田ら [10] は，Two-terminal series parallel グラフの族および外平面的グラフの族を定義するそれぞれの FGS に対し，反駁木問題を解く効率のよい並列アルゴリズムを与えている．

一般の FGS に対する反駁木問題を解くにはグラフ同型問題を解く必要がある．本稿の目的は，反駁木問題とグラフ同型問題との関係を明確にすることにある．まず，反駁木問題からグラフ同型問題への還元を与える．FGS の部分クラスであるサイズ限定単純 FGS に対する反駁木問題はグラフ同型問題に NC^2 還元可能であることを示す．また，単純 FGS により生成されるグラフの族は次数限定グラフの族に含まれることを示す．これにより，次数限定グラフに対するグラフ同型問題は多項式時間で解ける [5] ことから，サイズ限定単純 FGS に対する反駁木問題は多項式時間で解ける．また，次数限定木に対するグラフ同型問題は NC に入る [1] ので，次数限定木を生成するサイズ限定単純 FGS に対する反駁木問題は NC に属する．さらに，アトムに現れる変数の出現回数が高々 1 回であるようなサイズ限定単純 FGS に対する反駁木問題は NC^2 に入ることを示す．また，サイズ限定 FGS Γ を与え，Γ 上の反駁木問題は，本質的にグラフ同型問題を含むことを示す．

2　形式グラフ体系と反駁木問題

Σ と X を互いに素な有限アルファベットとし，$N = \{0, 1, \ldots\}$ とする．X の元を**変数**といい，$x, y, \ldots$ で表し，引数をもつ述語記号を $p, q, \ldots,$ で表し，その有限集合を Π とする．**グラフ**を，頂点の集合 V，辺の集合 E，写像 $\varphi : V \to \Sigma \cup X$，写像 $\psi : E \to \Sigma \cup N$ の 4 つ組 $G = (V, E, \varphi, \psi)$ で定義する．$G = (V, E, \varphi, \psi)$ は無向グラフ，有向グラフ，または多重グラフである．$Z \subseteq \Sigma \cup X$ に対し，Z の元でラベルづけられた頂点を Z **ラベル頂点**といい，V 中の Z ラベル頂点の集合を $\tilde{\varphi}(Z)$ とかく．とくに，X ラベル頂点を**変数頂点**という．また，Z の元でラベルづけられた辺を Z **ラベル辺**といい，E 中の Z ラベル辺の集合を $\tilde{\psi}(Z)$ で表す．V の頂点 v に対し，$\mathcal{N}(G, v)$ を v の隣接頂点の集合とし，$E(v)$ を v に付随する E 中の辺の集合とする．ある集合 Z に対し，Z の元の数を $\#Z$ で表す．V の部分集合 U に対し，両端点が U に含まれるような E 中の辺の集合を E_U とする．このとき，$G[U] = (U, E_U, \varphi, \psi)$ を U の**頂点誘導部分グラフ**という．E の部分集合 F に対し，F に属する辺の端点からなる V の部分集合を $V(F)$ とする．このとき，$E\langle F\rangle = (V(F), F, \varphi, \psi)$ を F の**辺誘導部分グラフ**という．deg を X から $N \cup N \times N$ への関数とする．このとき，X の元 x の**位数**を $deg(x)$ で定義する．

以下の条件を満たす $\Upsilon(\Sigma \cup X)$ に属するグラフ $G = (V, E, \varphi, \psi)$ を**項グラフ**という．

1. 任意の 2 つの変数頂点は隣接しない．
2. 任意の変数 x に対し，x でラベルづけられた頂点の次数は $deg(x)$ である．

3. $e \in E$ が変数頂点に付随する辺ならば，$\psi(e) \in N$ であり，かつそのときに限る．変数頂点 v に付随する異なる 2 つの辺 e_1 と e_2 に対し，$1 \leq \psi(e_1) \neq \psi(e_2) \leq \#E(v)$.

p を n 引数の述語記号，$g_1, \ldots, g_n$ を項グラフとする．このとき，$p(g_1, \ldots, g_n)$ を**アトム**という．とくに，$g_1, \ldots, g_n \in \Upsilon(\Sigma)$ であるアトム $p(g_1, \ldots, g_n)$ を**基礎アトム**という．$A, B_1, \ldots, B_n$ をアトムとする．このとき，**グラフ書換規則**とは，$A \leftarrow B_1, \ldots, B_n$ $(n \geq 0)$ の形をした節である．とくに，$n = 0$ のグラフ書換規則を**事実**という．

定義 1. **形式グラフ体系 (Formal Graph System, FGS)** とは，グラフ書換規則の有限集合である．

2 項関係 $\simeq$ を次のように定義する．無向グラフである項グラフ $g_1 = (V_1, E_1, \varphi_1, \psi_1)$ と $g_2 = (V_2, E_2, \varphi_2, \psi_2)$ に対し，$g_1 \simeq g_2$ とは，以下の条件を満たす同型写像 $\pi : V_1 \to V_2$ が存在するときをいう．

1. $u \in V_1$ に対し，$\varphi_1(u) = \varphi_2(\pi(u))$.
2. $\{u, v\} \in E_1$ に対し，$\psi_1(\{u, v\}) = \psi_2(\{\pi(u), \pi(v)\})$.

項グラフが有向グラフおよび多重グラフである場合も同様に定義される．アトム $p(f_1, \ldots, f_n)$ と $p(g_1, \ldots, g_n)$ に対し，$p(f_1, \ldots, f_n) \simeq p(g_1, \ldots, g_n)$ とは，各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対し $f_i \simeq g_i$ であるときをいう．

$x_1, \ldots, x_n$ を相異なる変数，$g_1, \ldots, g_n$ を項グラフ，σ_i $(1 \leq i \leq n)$ を g_i の相異なる $deg(x_i)$ 個の Σ ラベル頂点の列とする．このとき，有限集合 $\theta = \{x_1 := (g_1, \sigma_1), \ldots, x_n := (g_n, \sigma_n)\}$ を**代入** (*substitution*) という．$g = (V, E, \varphi, \psi)$ を項グラフ，$\sigma_i = (v_i^1, \ldots, v_i^{deg(x_i)})$ $(1 \leq i \leq n)$ とする．このとき，θ による g の**例** (*instance*) $g\theta = (V', E', \varphi', \psi')$ とは次のようにして g から得られる項グラフをいう．g の x_i $(1 \leq i \leq n)$ でラベルづけられた各変数頂点 v に対し，u_i^j $(1 \leq j \leq deg(x_i))$ を $\psi(\{v, u_i^j\}) = j$ である Σ ラベル頂点とする．まず，g の頂点 $u_i^1, \ldots, u_i^{deg(x_i)}$ と g_i の頂点 $v_i^1, \ldots, v_i^{deg(x_i)}$ をそれぞれ同一視し，g に g_i を連結する．なお，$\varphi'(u_i^j) = \varphi(u_i^j)$ $(1 \leq j \leq deg(x_i))$ である．その後，変数頂点 v とそれに付随する $E(v)$ の辺を取り除く．また，代入 θ，アトム $p(f_1, \ldots, f_n)$，およびグラフ書換規則 $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m$ に対し，
$p(f_1, \ldots, f_n)\theta = p(f_1\theta, \ldots, f_n\theta)$，$(A \leftarrow B_1, \ldots, B_m)\theta = A\theta \leftarrow B_1\theta, \ldots, B_m\theta$ と定義する．

A_1 と A_2 を 2 つの項グラフまたはアトムとする．このとき，$A_1\theta \simeq A_2\theta$ である代入 θ を A_1 と A_2 の**単一化代入** (*unifier*) という．また，ある代入 θ と θ' に対し，$A_1 \simeq A_2\theta$ かつ $A_1\theta' \simeq A_2$ であるとき，A_1 は A_2 の**変種** (*variant*) という．$B_1, \ldots, B_m$ をアトムとする．このとき，$\leftarrow B_1, \ldots, B_m$ $(m \geq 0)$ の形のグラフ書換規則を**ゴール**という．とくに，$m = 0$ のときのゴールを空節といい，$\Box$ で表す．

グラフ書換規則 C に対し，$v(C)$ を C に現れるすべての変数の集合とする．あるゴールからあるアトムを選ぶために計算規則 Q を仮定する．Γ をある FGS，D を Γ のゴールとする．論理

プログラムと同様に，D からの**導出** (*derivation*) とは，以下の条件 (1),(2),(3) を満たす 3 つ組 (D_i, θ_i, C_i) $(i = 0, 1, \ldots,)$ の列である:

(1) D_i はゴール，θ_i はある代入，C_i は Γ のグラフ書換規則の変種であり，$D_0 = D$ である．

(2) 相違なる i, j に対し，$v(C_i) \cap v(C_j) = \emptyset$ である．また，すべての i について $v(C_i) \cap v(D) = \emptyset$ である．

(3) D_i がゴール $\leftarrow A_1, \ldots, A_k$ であり，A_m が Q により選ばれたアトムならば，$C_i = A \leftarrow B_1, \ldots, B_q$，$\theta_i$ が A と A_m の単一化代入，$D_{i+1} = (\leftarrow A_1, \ldots, A_{m-1}, B_1, \ldots, B_q, A_{m+1}, \ldots, A_k)\theta_i$ である．

また，空節で終わる有限導出を**反駁**という．F をゴール D からの反駁とする．このとき，次のように定義される木を F の**反駁木**という．

(1) 木の根はゴール D である．

(2) 木の葉はすべて空節である．

(3) 導出 (D_i, θ_i, C_i) の各ステップにおいて，θ_i が D_i のあるアトム A と $C_i = A_i \leftarrow B_1, \ldots, B_k$ の頭部 A_i の単一化代入であるならば，木の頂点 A はすべての $B_j\theta_i$ $(1 \leq j \leq k)$ に有向辺をもつ．

グラフ書換規則 C が代入およびモーダスポーネンスの有限回の適用により FGS Γ から得られるとき，C は Γ から**証明可能**であるといい，$\Gamma \vdash C$ とかく．つまり，関係 $\Gamma \vdash C$ は次のように帰納的に定義される．

(1) $C \in \Gamma$ ならば，$\Gamma \vdash C$ である．

(2) $\Gamma \vdash C$ ならば，任意の代入 θ に対し，$\Gamma \vdash C\theta$ である．

(3) $\Gamma \vdash A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, B_{m+1}$，かつ $\Gamma \vdash B_{m+1}$ ならば，$\Gamma \vdash A \leftarrow B_1, \ldots, B_m$ である．

また，一引数の述語記号 p に対し，**言語** $GL(\Gamma, p)$ を $\{g \in \Upsilon(\Sigma) \mid \Gamma \vdash p(g) \leftarrow\}$ と定義する．ある言語 $L \subseteq \Upsilon(\Sigma)$ が **FGS 言語**であるとは，$L = GL(\Gamma, p)$ である FGS Γ と述語記号 p が存在するときをいう．集合 $B(\Gamma) = \{p(g_1, \ldots, g_n) \mid p \in \Pi$ かつ $g_1, \ldots, g_n \in \Upsilon(\Sigma)\}$ とし，集合 $SS(\Gamma) = \{A \in B(\Gamma) \mid \leftarrow A$ からの反駁が存在する$\}$ とする．集合 $PS(\Gamma)$ を Γ から証明可能なすべての基礎アトムの集合とする．

命題 1. すべての FGS Γ に対し，$SS(\Gamma) = PS(\Gamma)$.

定義 2. FGS Γ と一引数の述語記号 p 上の**反駁木問題** ($\mathbf{RT}(\Gamma, p)$) を次のように定義する．

INSTANCE: グラフ G.

PROBLEM: もし G の反駁木が存在するならばその木を構築せよ．

命題 1 より，反駁木問題は認識問題と一致する．

3 サイズ限定単純 FGS 上の反駁木問題からグラフ同型問題への還元

$g=(V,E,\varphi,\psi)$ をある項グラフとする．$V' := V - \{v, \mathcal{N}(g,v) \mid \varphi(v) \in X\}$, $E' := E - \{e \in E \mid e$ の端点が変数頂点である$\}$ とする．このとき，g のサイズ ($|g|$ とかく) を頂点数と辺数の組 $(\#V', \#E')$ で定義する．アトム $p(g_1,\ldots,g_n)$ に対し，$\|p(g_1,\ldots,g_n)\| = |g_1| + \cdots + |g_n|$ とする．グラフ書換規則 $A \leftarrow B_1,\ldots,B_m$ が**サイズ限定**であるとは，任意の代入 θ に対し，$\|A\theta\| \geq \|B_1\theta\| + \cdots + \|B_m\theta\|$ であるときをいう．FGS Γ が**サイズ限定**であるとは，Γ のすべてのグラフ書換規則がサイズ限定であるときをいう．以後，グラフ書換規則を単に規則ということにする．

2 項関係 $\sim$ を次のように定義する．無向グラフである項グラフ $g_1 = (V_1,E_1,\varphi_1,\psi_1)$ と $g_2 = (V_2,E_2,\varphi_2,\psi_2)$ に対し，$g_1 \sim g_2$ とは，以下の条件 (1) と (2) を満たす同型写像 $\pi : V_1 \rightarrow V_2$ が存在するときをいう．

(1) 任意の頂点 $u \in V_1$ に対し，$\varphi_1(u) = \varphi_2(\pi(u))$.

(2) $\varphi_1(\{u,v\}) \in N$ である辺 $\{u,v\} \in E_1$ に対し，$\psi_1(\{u,v\}) = \psi_2(\{\pi(u),\pi(v)\})$.

項グラフが有向グラフまたは多重グラフである場合も同様に定義される．

すべての辺が $a \in \Sigma$ でラベルづけられているグラフからなる $\Upsilon(\Sigma)$ の部分集合を Ψ_a とする．*Shield* を任意の述語記号 p に対し Ψ_a に属する p の引数個のグラフの列をかえす関数とする．規則

$$q_0(g_0^1,\ldots,g_0^{l_0}) \longleftarrow q_1(g_1^1,\ldots,g_1^{l_1}),\ldots,q_k(g_k^1,\ldots,g_k^{l_k}) \quad (k \geq 0)$$

が以下の条件を満たすとき，その規則は**単純**であるという．ここで，$g_i^j = (V_i^j, E_i^j, \varphi_i^j, \psi_i^j)$ $(0 \leq i \leq k, 1 \leq l_i \leq l, 1 \leq j \leq l_i)$ は連結項グラフであり，q_i は $Shield(q_i) = (h_i^1,\ldots,h_i^{l_i})$ である l_i 引数の述語記号である．

(I) 各項グラフ g_i^j $(1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l_i)$ は以下の条件 (i),(ii),(iii) を満たす．

  (i) 複数の変数頂点に隣接する頂点は存在しない．

  (ii) $g_i^j[V_i^j - \{u,v \mid u \in \tilde{\varphi}_i^j(X), \mathcal{N}(g_i^j,v) = \{u\}\}] \simeq h_i^j$.

  (iii) 以下の条件 (a) と (b) を満たす項グラフ $g=(V,E,\varphi,\psi)$ を部分グラフとしてもつ頭部の項グラフ g_0^l が存在する．

    (a) $g \sim g_i^j$.

    (b) 任意の頂点 $v \in \{\mathcal{N}(g,u) \mid u \in \tilde{\varphi}(X)\}$ に対し，$\mathcal{N}(g,v) = \mathcal{N}(g_0^l,v)$.

(II) 各項グラフ g_0^l $(1 \leq l \leq l_0)$ は以下の条件 (1),(2),(3) を満たす．

  (1) $\{a\}$ ラベル辺が存在するならば，複数の変数頂点に隣接する頂点は存在しない．

  (2) $E_0^l\langle\tilde{\psi}_0^l(\{a\})\rangle \simeq h_0^l$.

  (3) 変数頂点の隣接頂点を端点にもつ $\{a\}$ ラベル辺が存在するならば，$g_0^l \simeq g_i^j$ である項グラフ g_i^j $(1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l_i)$ が存在する．

FGS Γ が単純であるとは，Γ のすべての規則が単純であるときをいう．

補題 1. Γ を単純 FGS とし，p を Γ に現れる述語記号とする．このとき，$GL(\Gamma,p)$ は次数限定グラフの族に含まれる．

定理 1. Γ をサイズ限定単純 FGS とし，p を Γ に現れる述語記号とする．このとき，$\mathrm{RT}(\Gamma,p)$ はグラフ同型問題に NC^2 還元可能である．

証明: 入力となるグラフ $G=(V,E,\varphi,\psi)$ を $V=\{1,\ldots,n\}$ である無向グラフとする．

パスシステム $P=(N,T,GEN,s)$ [3, 7] を次のように構築する．ここで，N はシステムの元の集合，T は N の部分集合，GEN は $N\cup(N\times N)\cup\cdots\cup N^k$ から 2^N への関数 (k: 定数)，s は N のある元である．

パスシステム P の元の集合 N を集合 $\{MakeAtom(r) \mid 規則\ r\in\Gamma\}\cup\{p(G)\}$ とする．ここで，$MakeAtom$ とは，入力として Γ の規則が与えられたときにアトムの集合を出力する次のような操作である．l をある正定数，k を負でない定数，$1\leq l_0,\ldots,l_k\leq l$ とする．また，$g_i^j=(V_i^j,E_i^j,\varphi_i^j,\psi_i^j)$ $(0\leq i\leq k, 1\leq j\leq l_i)$ を連結項グラフ，q_i を l_i 引数の述語記号とする．このとき，Γ を以下のような規則 r からなると仮定しても一般性を失わない．

$$q_0(g_0^1,\ldots,g_0^{l_0}) \longleftarrow q_1(g_1^1,\ldots,g_1^{l_1}),\ldots,q_k(g_k^1,\ldots,g_k^{l_k}).$$

この規則 r が入力として与えられたときの手続き $MakeAtom$ を以下に示す．

Procedure $MakeAtom(r$: a rule): Set;

1. **If** r が事実である **then**
2. $\quad U := \{[q_0,a_1,\ldots,a_{l_0}] \mid a_j\in MakeTerm(g_0^j), 1\leq j\leq l_0\}$;
3. **else**
4. $\quad U := \emptyset$;
5. $\quad$ **For** $i := 1$ **to** k **do**
6. $\quad\quad U := U\cup\{[q_i,a_1,\ldots,a_{l_i}] \mid a_j\in MakeTerm(g_i^j), 1\leq j\leq l_i\}$;
7. $\quad$ **od**

Output U

Procedure *MakeTerm*($g = (V_g, E_g, \varphi_g, \psi_g)$: a term graph): Set;

$s := \#(E_g - \{e \in E_g \mid e$ の端点が変数頂点である$\})$;
$c := \#\tilde{\varphi}_g(X)$;
$t_v :=$ g の頂点 v の次数;
$F := \{(e_1, \ldots, e_s) \mid e_1, \ldots, e_s$ は互いに異なる E の元$\}$;
If $c = 0$ **then**
 $Z := Z \cup \{\langle B \rangle \mid B \in F, E\langle B \rangle \simeq g\}$;
else
 g の変数頂点をソートする関数 I を計算する;
 $E_g - \{e \in E_g \mid e$ の端点が変数頂点である$\}$ をソートする関数 J を計算する;
 For $(e_1, \ldots, e_s) \in F$ **pardo**
  For $v \in \tilde{\varphi}_g(X)$ **pardo**
   $D_v^{(e_1,\ldots,e_s)} := \{(u_1, \ldots, u_{t_v}) \mid u_i \neq u_j \in e_1 \cup \cdots \cup e_s, 1 \leq i \neq j \leq t_v\}$;
  odpar
  $M^{(e_1,\ldots,e_s)} := \{(d_{v_1}, \ldots, d_{v_c}) \mid v_i \in \tilde{\varphi}_g(X), d_{v_i} \in D_{v_i}^{(e_1,\ldots,e_s)}, 1 \leq i \leq c\}$;
 odpar
 then $Z := Z \cup \Big\{\langle f, m \rangle \mid f \in F$ と $m \in M^f$ は以下の条件を満たす$\Big\}$;
  $f = (e_1, \ldots, e_s)$, $m = (d_{v_1}, \ldots, d_{v_c})$, $d_{v_i} = (u_i^1, \ldots, u_i^{t_i})$ $(1 \leq i \leq c)$ とする．以下の条件 (I) と (II) を満たす同型写像 $\pi : (e_1 \cup \cdots \cup e_s) \to V_g - \tilde{\varphi}_g(X)$ が存在し，かつ *Check*$(g, \langle (e_1, \ldots, e_s), (d_{v_1}, \ldots, d_{v_c}) \rangle)$ =true である．

(I) 各 e_i $(1 \leq i \leq s)$ に対し，対応する g 上の辺の J の値は i である．

(II) 各 i $(1 \leq i \leq c)$ に対し，$\{\pi(u_i^1), \ldots, \pi(u_i^{t_i})\} = \mathcal{N}(g, v)$ かつ $I(v) = i$ である g の変数頂点 v が存在する．

Output Z

Procedure *Check*(g: a term graph, d: a sequence): boolean;

/* $g = (V_g, E_g, \varphi_g, \psi_g)$; $d = \langle (e_1, \ldots, e_s), (\eta_1, \ldots, \eta_c) \rangle$; */

D :=false;
For g 中の各変数 x **pardo**
 If $\#\tilde{\varphi}_g(\{x\}) \geq 2$ **then**
  For $u \in \tilde{\varphi}_g(\{x\})$ **pardo**

5. $\eta_{I(u)}$ の頂点を含む $G-\{e_1,\dots,e_s\}$ の成分からなるグラフ $B_{I(u)}$ を構築する;
6. **odpar**
7. **If** 任意の $u,v \in \tilde{\varphi}_g(\{x\})$ に対し $B_{I(u)} \simeq B_{I(v)}$ **then** C_x :=true;
8. **else** C_x :=false;
9. **else** C_x :=true;
10. **odpar**
11. **If** g 中のすべての変数 x に対し C_x=true である **then** D :=true;
    Output D

手続き *MakeAtom* と *MakeTerm* は手続き *Check* を除き対数領域で計算できる．手続き *Check* は，連結成分を計算する NC^2 アルゴリズム [3] を用いることにより，グラフ同型問題を解かなければならない 7 行目を除き NC^2 で計算可能である．

T を集合 $\{MakeAtom(r) \mid$ 事実 $r \in \Gamma\}$ とし， $s=\{p(G)\}$ とする． k を Γ の規則の本体にあるアトムの最大数とする．このとき，関数 GEN は次のように定義される $N \cup N \times N \cup \cdots \cup N^k$ から 2^N への関数とする． N の元 $[q, \langle b^1, \lambda^1 \rangle, \dots, \langle b^{l_0}, \lambda^{l_0} \rangle]$ が $GEN([q_1, \langle c_1^1, \delta_1^1 \rangle, \dots, \langle c_1^{l_1}, \delta_1^{l_1} \rangle], \dots, [q_m, \langle c_m^1, \delta_m^1 \rangle, \dots, \langle c_m^{l_m}, \delta_m^{l_m} \rangle])$ $(m \le k)$ の元であるとは，以下の条件 (i),(ii),(iii) を満たす規則 $q(g^1,\dots,g^{l_0}) \leftarrow q_1(f_1^1,\dots,f_1^{l_1}),\dots,q_m(f_m^1,\dots,f_m^{l_m})$ と代入 $\theta=\{x_1:=(h_1,\sigma_1),\dots,x_t:=(h_t,\sigma_t)\}$ が存在するときをいい，またそのときに限る: 頂点の集合 $U \subseteq V$ と辺の集合 $Z \subseteq E$ に対し， U の元をもつ辺誘導部分グラフ $E\langle E-Z \rangle$ の連結成分からなるグラフの辺の集合を $B_{(Z,U)}$ とする．また， $H_{(Z,U)}$ を G の辺誘導部分グラフ $E\langle Z \cup B_{(Z,U)} \rangle$ とする．

(i) 代入 θ における項グラフ $h_1,\dots,h_t$ はすべて G の部分グラフである．

(ii) 規則の頭部における各項グラフ g^i $(1 \le i \le l_0)$ に対し， $g_i\theta \simeq H_{(b^i,\lambda^i)}$ である．

(iii) 規則の本体における各項グラフ f_i^j $(1 \le i \le m, 1 \le j \le l_i)$ に対し $\langle c_i^j, \delta_i^j \rangle \in MakeTerm(f_i^j)$ であり，かつ次の条件を満たす $f_i^j\theta$ の頂点の集合から $H_{(c_i^j,\delta_i^j)}$ の頂点の集合への同型写像 π_i^j が存在する． f_i^j の変数頂点に隣接しない 2 頂点 u と v に対し， $\{u,v\}$ が f_i^j の辺であるとは， $\{\pi_i^j(u), \pi_i^j(v)\}$ が c_i^j の元であるときをいい，またそのときに限る．

関数 GEN はグラフ同型問題を解かなければならない部分を除き NC^2 で計算できる．

N の元の個数は n の多項式時間でおさえられるので，パスシステム P を解く NC^2 アルゴリズム [3, 7] が存在する．システム P が解けることと s が GEN を用いて T から生成されることとは同値であり， $\mathrm{RT}(\Gamma,p)$ はグラフ同型問題に NC^2 還元可能である．

入力となるグラフが有向グラフまたは多重グラフのときも同様の結果が得られる．

(Q.E.D)

$$\Gamma_{GI} = \left\{ \begin{array}{l}
q(a,a) \longleftarrow \\
q\left(\begin{array}{ccc} a & \overset{c}{\text{———}} & a \\ & {}_{1}\diagdown\; y \;\diagup_{2} & \end{array} \;,\; \begin{array}{ccc} a & \overset{c}{\text{———}} & a \\ & {}_{1}\diagdown\; y \;\diagup_{2} & \end{array} \right) \longleftarrow q(a \overset{1}{-} y \overset{2}{-} a) \\
q(a \overset{c}{-} a \overset{1}{-} x, a \overset{c}{-} a \overset{1}{-} x) \longleftarrow q(a \overset{1}{-} x, a \overset{1}{-} x) \\
p(x \overset{1}{-} b \overset{c}{-} b \overset{1}{-} x) \longleftarrow q(a \overset{1}{-} x, a \overset{1}{-} x) \\
r(a,a) \longleftarrow \\
r\left(\begin{array}{ccc} a & \overset{c}{\longleftarrow} & a \\ & {}_{1}\nwarrow\; y \;\swarrow_{2} & \end{array} \;,\; \begin{array}{ccc} a & \overset{c}{\longleftarrow} & a \\ & {}_{1}\nwarrow\; y \;\swarrow_{2} & \end{array} \right) \longleftarrow r(a \overset{1}{\leftarrow} y \overset{2}{\leftarrow} a) \\
r(a \overset{c}{\leftarrow} a \overset{1}{\leftarrow} x, a \overset{c}{\leftarrow} a \overset{1}{\leftarrow} x) \longleftarrow r(a \overset{1}{\leftarrow} x, a \overset{1}{\leftarrow} x) \\
r(a \overset{c}{\rightarrow} a \overset{1}{\leftarrow} x, a \overset{c}{\rightarrow} a \overset{1}{\leftarrow} x) \longleftarrow r(a \overset{1}{\leftarrow} x, a \overset{1}{\leftarrow} x) \\
p(x \overset{1}{\leftarrow} b \overset{c}{\leftarrow} b \overset{1}{\leftarrow} x) \longleftarrow r(a \overset{1}{\leftarrow} x, a \overset{1}{\leftarrow} x)
\end{array} \right\}.$$

図 1: FGS Γ_{GI}

Γ と p をそれぞれ上述の定理で与えられた FGS と述語記号とする．インスタンスが次数限定グラフに制限されたグラフ同型問題は多項式時間で解ける [5] ことから，RT(Γ, p) は多項式時間で解ける．Γ を $GL(\Gamma, p)$ が木の族に含まれるようなサイズ限定単純 FGS とし，p を Γ に現れる述語記号とする．このとき，次数限定木に対するグラフ同型問題は NC に入る [1] ので，RT(Γ, p) は NC に属する．

系 1. Γ を各アトムに現れる変数の出現回数が高々 1 回であるような規則からなるサイズ限定単純 FGS とし，p を Γ に現れる述語記号とする．このとき，RT(Γ, p) は NC^2 に属する．

4 グラフ同型問題から反駁木問題への還元

グラフ同型問題とは，インスタンスとしてグラフ G_1 と G_2 が与えられたとき，G_1 と G_2 が同型であるかどうか決定する問題である．FGS Γ と一引数の述語記号 p 上の反駁木問題 RT(Γ, p) を決定問題に書き直したものを DRT(Γ, p) とする．

定理 2. Γ_{GI} を図 1で与えられるサイズ限定 FGS とし，p を Γ_{GI} に現れる一引数の述語記号とする．このとき，グラフ同型問題は DRT(Γ_{GI}, p) に対数領域還元可能である．

証明: グラフ同型問題のインスタンスであるグラフ $G_1 = (V_1, E_1)$ と $G_2 = (V_2, E_2)$ に対し，FGS Γ_{GI} 上で扱うことのできる次のようなグラフ $G = (V, E, \varphi, \psi)$ を構築する: ここで，$e \notin E_1 \cup E_2$ とする．

(1) $V = V_1 \cup V_2$.

(2) $E = E_1 \cup E_2 \cup \{e\}$.

(3) 任意の頂点 $v \in V$ に対し，v が e の端点のとき $\varphi(v) = b$ であり，そうでないとき $\varphi(v) = a$ である．

(4) 任意の辺 $e' \in E$ に対し，$\psi(e') = c$ である．

このインスタンスの書き換えは対数領域で計算可能である．また，明らかに，インスタンスが G である $\mathrm{DRT}(\Gamma_{GI}, p)$ を解くことにより，グラフ G_1 と G_2 が同型かどうかを決定することができる．($Q.E.D$)

この定理 2により，図 1で与えられる FGS Γ_{GI} と述語記号 p 上の $\mathrm{DRT}(\Gamma_{GI}, p)$ を解くことにより，グラフ同型問題を解くことができる．

参考文献

[1] T. Akutsu. An RNC algorithm for finding a largest common subtree of two trees. *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E75-D:95–101, 1992.

[2] S. Arikawa, S. Miyano, A. Shinohara, T. Shinohara, and A. Yamamoto. Algorithmic learning theory with elementary formal systems. *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E75-D(4):405–414, 1992.

[3] A. Gibbons and W. Rytter. *Efficient Parallel Algorithms.* Cambridge University Press, 1988.

[4] Xin He. Efficient parallel algorithms for series parallel graphs. *J. Algorithms*, 12:409–430, 1991.

[5] E. M. Luks. Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time. *J. Comput. System Sci.*, 25:42–65, 1982.

[6] T. Pavlidis. Linear and context-free graph grammars. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 19(1):11–22, 1972.

[7] W. Rytter. The complexity of two-way pushdown automata and recursive programs. Technical report, *Combinatorial Algorithms on Words*, NATO ASI Series F:12, (Springer-Verlag), 1985.

[8] W. Rytter and T. Szymacha. Parallel algorithms for a class of graphs generated recursively. *Inform. Process. Lett.*, 30:225–231, 1989.

[9] R. M. Smullyan. *Theory of Formal Systems.* Princeton Univ. Press, 1961.

[10] T. Uchida, T. Shoudai, and S. Miyano. Parallel algorithms for refutation tree problem on formal graph systems. RIFIS-TR-CS-59, Research Institute of Fundamental Information Science, Kyushu University, July 1992.